

計算の限界

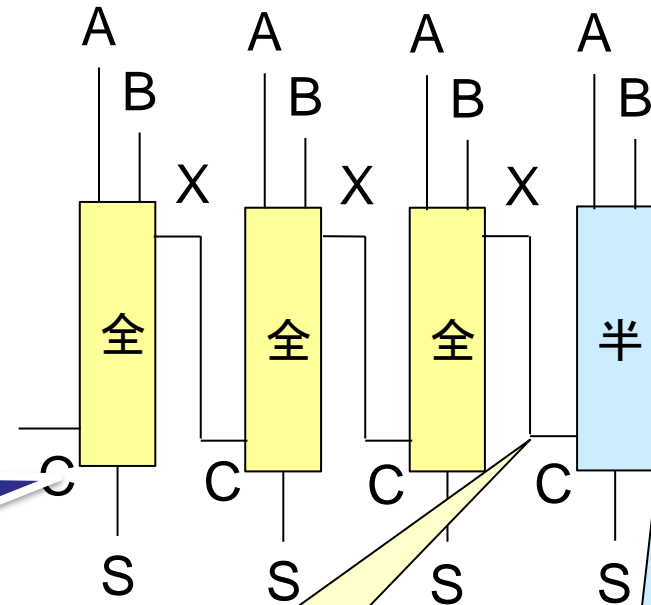
情報 I 第26回授業

08コンピュータとプログラミング

対応ファイル: 23exp26.xls

【復習】加算回路を用いた4桁の計算

$$\begin{array}{r} 1101 \quad A \\ + 1011 \quad B \\ \hline 1110 \quad C(-) \end{array}$$



4桁の計算機
は、4桁以内
でしか正確に
計算できない

繰り上がりのCが、
次の全加算機のX
の値となっていく

1桁目は前の桁の
繰り上がりが無い
→半加算機が良い

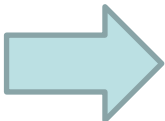
例) 電卓の計算

- 10桁の電卓で、次の計算結果を見てみよう
 - 1234567890×10
 - $0.000000001 \div 10$
 - $1 \div 3 \times 3$

練習

- Excelを開き、
 1. セルA1に「4.3」、セルA2に「4.2」を入力
 2. セルA3に「=A1-A2」を入力
 3. セルA1からA3を選択し、
 - 右クリックから「セルの書式設定」を選び、「数値」を選択する。
 - A列とB列の境目をドラッグしA列幅を大きく広げる
- 起きている現象の理由を考えてみよう。

予備知識(指数法則)

- 累乗は、掛け算・割り算よりも優先して計算
– 例: $3 \div 2^4 = 3 \div 16$
- $10^8 \times 10^7 = (10 \times \cdots \times 10) \times (10 \times \cdots \times 10)$
 $= 10^{8+7}$ 8個 7個
- $10^8 \div 10^7 = (10 \times \cdots \times 10) \div (10 \times \cdots \times 10)$
 $= \frac{10 \times 10 \times \cdots \times 10}{10 \times 10 \times \cdots \times 10}$ ※7個分約分される!
 $= 10^{8-7}$

特に、 $10^0 = 1$ 、 $10^{-a} = \frac{1}{10^a}$ 、 $10^{-1} = 0.1$

浮動小数点数

- 非常に小さな数値から大きな数値まで表すために、小数点位置を固定せずに表現
 - 理科の有効数字等で良く利用される
- 限られたケタ数を、効率よく活用できる

符号

仮数

指数

例1) $123450000000 \rightarrow 1.2345 \times 10^{11}$

例2) $-0.00000054321 \rightarrow -5.4321 \times 10^{-7}$

※ $10^0 = 1$ 、 $10^{-1} = 0.1$ に注意！

※ソフトによっては「 $\times 10^{11}$ 」を「E+11」等と表現される

例) $-5.4321 \times 10^{-7} \Rightarrow -5.4321\text{E-}07$

浮動小数点数の正規化

浮動小数点数は、同じ数でもいろいろな表現ができる。

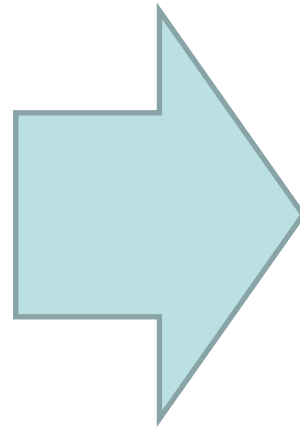
• 例 0.0356

→ 0.356×10^{-1}

→ 3.56×10^{-2}

→ 35.6×10^{-3}

.....



3.56 $\times 10^{-2}$



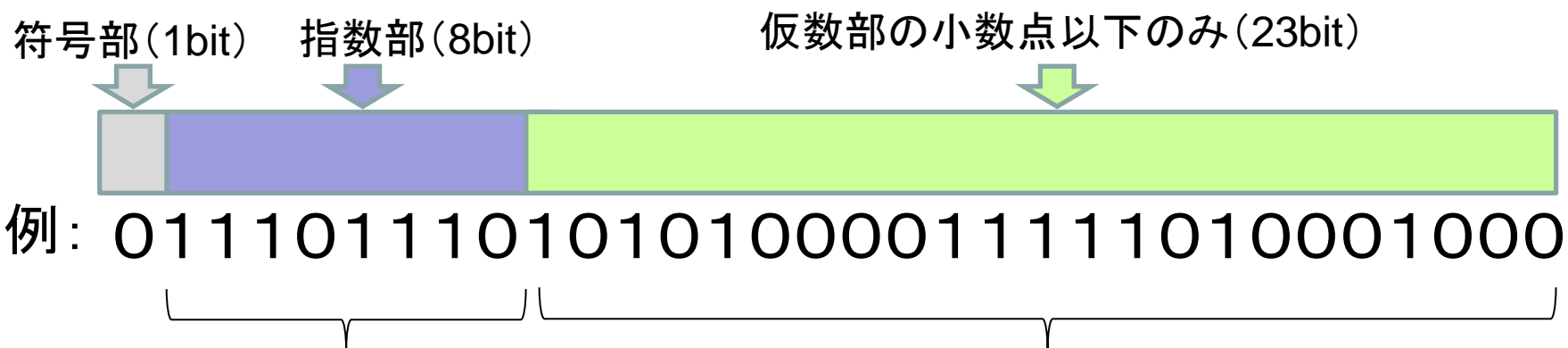
仮数部の整数部分を、
0以外の1桁にする！

2進法と浮動小数点(1) (p.127)

- 2進法でも、浮動小数点表示がある！
 - ただし、 $0.1_{(2)} = 0.5_{(10)}$ であることに注意！
- 「IEEE754」という国際規格が定められている

★32ビット単精度浮動小数点数の構成

仮数の整数部を常に1として考える。



$2^8 = 256$ 、うち特別な場合を除き、
-126 ~ 127、よって $2^{127} \doteq 10^{38}$ 、
10進法で38ケタ程度まで扱える

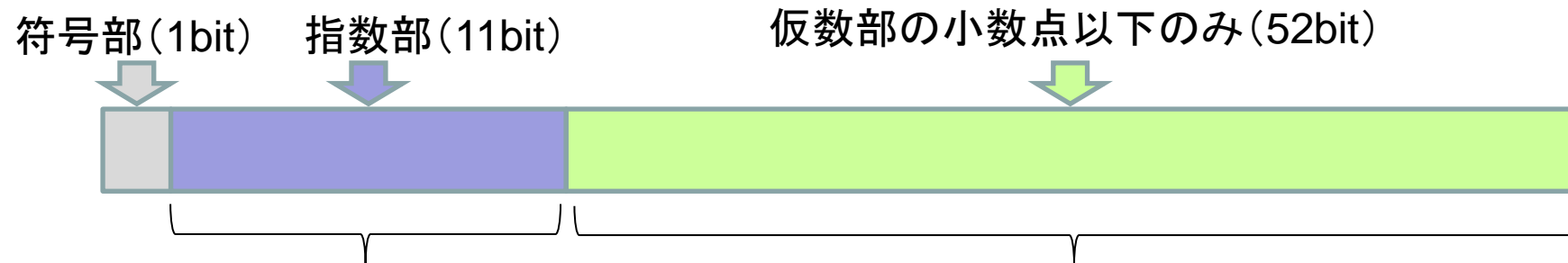
$2^{(23+1)} \doteq 10^7$ なので
10進法で7桁程度の精度

→ $2^{32} = 4294967296$ 以上の数も扱える！

2進法と浮動小数点(2) (p.127)

★64ビット倍精度浮動小数点数の構成

仮数の整数部を常に1として考える。



$2^{11} = 2048$ 、うち特別な場合を除き、
-1022 ~ 1023、よって $2^{1023} \doteq 10^{307}$ 、
仮数部と併せ308ケタ程度まで扱える

$2^{(52+1)} \doteq 10^{15}$ なので
10進法で15桁程度の精度

※現在のコンピュータのCPUは64bitが主流であり、また、専用の計算回路がついているため、倍精度を使うことが多い。

誤差

コンピュータは、扱える数の範囲に限界があり、場合によっては概数で計算している

→ 本質的に誤差を含んでいる可能性！

誤差が起きる場合

1. コンピュータが扱える数の範囲の限界
オーバーフロー、アンダーフロー など
2. 無理数や循環小数などによる誤差
丸め誤差、打ち切り誤差 など
3. 絶対値が近い数の差、絶対値が非常に大きい数と小さい数の和や差など、演算による誤差
桁落ち、情報落ち など

問い(考えてみよう)

- ① 先のExcelの問題で、 $4.3 - 4.2$ を、できるだけ精度を高く行うにはどうしたら良いか。
- ② 10桁の電卓で、 $10000000000 + 0.4 + 0.4 + 0.4$ を、できるだけ精度を高く行うにはどうすれば良いか。

計算の限界 まとめ

- コンピュータの計算には、「限界」がある！
 - メモリの限界、扱える範囲の限界、桁数の限界・・・
 - 常に厳密で正確な計算、というわけではない！
 - 「おおよその値」という場合もあることを意識！
- 特性を理解して、精度の高い活用を！
 - 小数を使う時は、丸め誤差に要注意！
 - 絶対値の差が非常に大きい時は、小さい数から計算！
 - 引き算よりも、足し算になるよう心掛けよう！